המרכז ללמודים קדם-אקדמיים

מבחן טרימסטר א' במתמטיקה

משך המבחן 3 שעות. יש לפתור את **כל** השאלות!

אין להשתמש במחשבונים! אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!

סעיפים שונים באותה שאלה שווים בניקוד עד כדי נקודה, אלא אם רשום אחרת!

בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!

כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – חייבת הוכחה!

שאלה 1 - 16%

8% א. פתור: $\sqrt{x^2-4x}>x-3$.

8% ב. עבור אילו ערכים של m יש למשוואה $x^2+(2m+1)x+m^2=0$ שני פתרונות ממשיים המקיימים $x_1:x_2=4:1$?

שאלה 2 – 16%

א. 8% .1 צייר על מערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $y_1=x^2-3x\ ,\ \ y_2=-\left(\frac{5}{x}+2\right)$.

2% .2 כמה פתרונות יש למשוואה $x^2-3x=-\left(\frac{5}{x}+2\right)$? נמק!

6% ב. הוכח שהגרפים של הפונקציות $y=4^x-3\cdot2^x\ ,\ y=-5\cdot2^{-x}-2$ לא נחתכים. **רמז:** ניתן להיעזר בסעיף א'.

שאלה 3 – 20%

10% א. פתור: $\frac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}=-\sqrt{x}$.

10% ב. פתור: $4\log_9^2(-x)+2\log_9\left(x^2\right)\le-1$.

שאלה 4 – 14%

6% א. פתור: $2^{|x|}>\frac{7\cdot2^{|x|}-32}{2^{|x|}-5}$.

8% ב. פתור: $\log_x a\cdot\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{2a-x}}\right)=1$ עבור כל הערכים המותרים של הפרמטר a.

יש לפתור את השאלות הבאות רק באמצעות גיאומטרית-המישור.
כל משפט בגיאומטרית המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה!
תזכורת! – חובה לשרטט בעזרת סרגל ומחוגה ולא ביד חופשית!

שאלה 5 – 18%

במשולש שווה-שוקיים ABC ‏(AB=BC) בוחרים נקודה D על השוק BC כך ש- $BD:DC=1:4$.
הקטע AD חותך את הגובה BE של המשולש בנקודה F.
מנקודה D מעבירים קטע DK מקביל לבסיס המשולש, K על BE ‏($K \in BE$). הוכח:

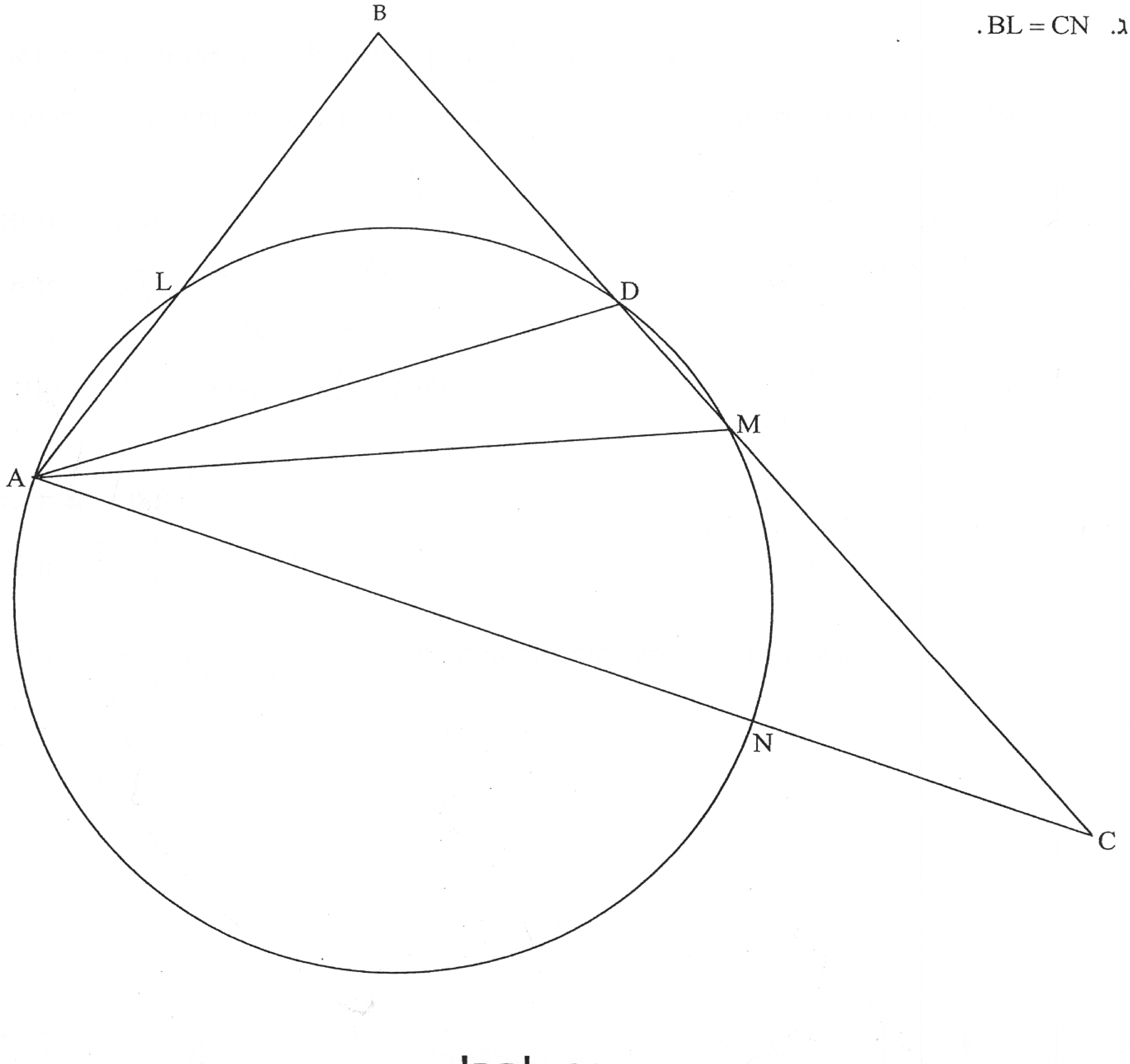
6% א. $BE=5BK$.
6% ב. $EF=5KF$.
6% ג. $BF:EF=1:2$.

שאלה 6 – 16%

6% א. הוכח את משפט חוצה-הזווית הפנימית במשולש:
חוצה-הזווית AD במשולש ABC מחלק את הצלע שמול הזווית כך ש- $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$.

במשולש ABC , AM תיכון ו- AD חוצה-זווית.
דרך הנקודות M,D,A מעבירים מעגל שחותך את AB בנקודה L ואת AC בנקודה N. הוכח:

5% ב. $AB\cdot BL=MC\cdot BD$.
5% ג. $BL=CN$.



בהצלחה!

שאלה 1:

(א)

$$\sqrt{x^2-4x} > x-3$$

ת.ג

$x^2-4x \geq 0$

$x(x-4) \geq 0$

$+ \quad - \quad +$

$0 \quad 4$

$x \geq 4$

$x \leq 0$

$x-3<0$

$\Downarrow$

$\boxed{x<3}$

(א)

$x-3 \geq 0$

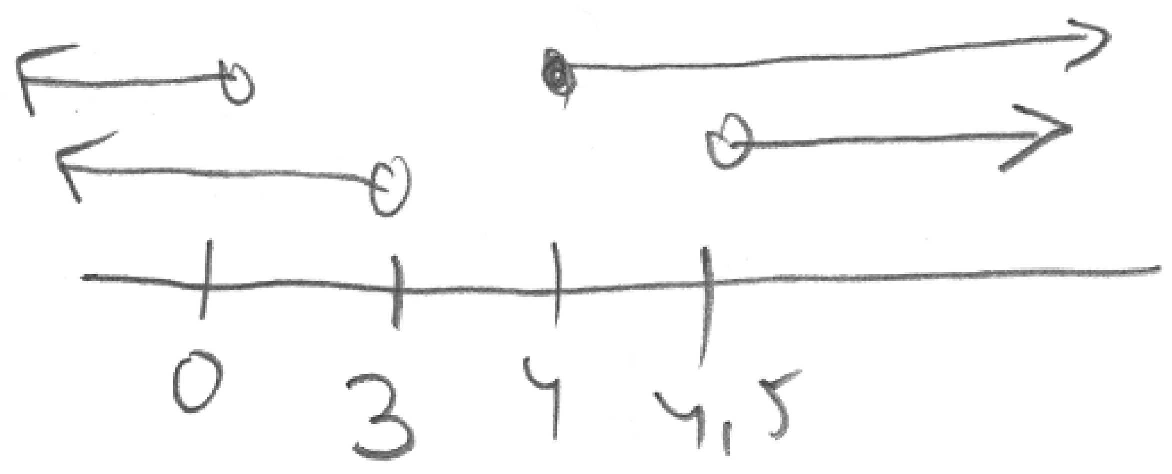
$x \geq 3$

$x^2-4x > x^2-6x+9$

$2x > 9$

$\boxed{x>4.5}$

$\boxed{x>4,5}$



$$\boxed{\begin{array}{l} x>4,5 \\ x \leq 0 \end{array}}$$

א

שאלה 1:

ד

$$x^2+(2m+1)x+m^2=0$$

$$\alpha+\beta=-2m-1$$

$$\alpha\cdot\beta=m^2$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=4 \Rightarrow \alpha=4\beta$$

$$5\beta=-2m-1$$

$$4\beta^2=m^2$$

$m=2\beta$	$m=-2\beta$
$5\beta=-4\beta-1$	$5\beta=4\beta-1$
$9\beta=-1$	$\beta=-1$
$\beta=-\frac{1}{9}$	$\boxed{m=2}$
$\Downarrow$	
$\boxed{m=-\frac{2}{9}}$	

שאלה 2:

$y = x^2 - 3x$

$x(x-3)$

$(0,0)$ $(3,0)$

$(1.5, -2.25)$

$y = -\frac{5}{x} - 2 = -\frac{5-2x}{x}$

$(-2.5, 0)$

$(+1.5, -\frac{16}{3})$

$x \neq 0$

$y = -2$

$\frac{-5-3}{+1.5} = \frac{-8}{+1.5}$

$\frac{-8}{\frac{3}{2}} = \frac{-16}{3}$

ב

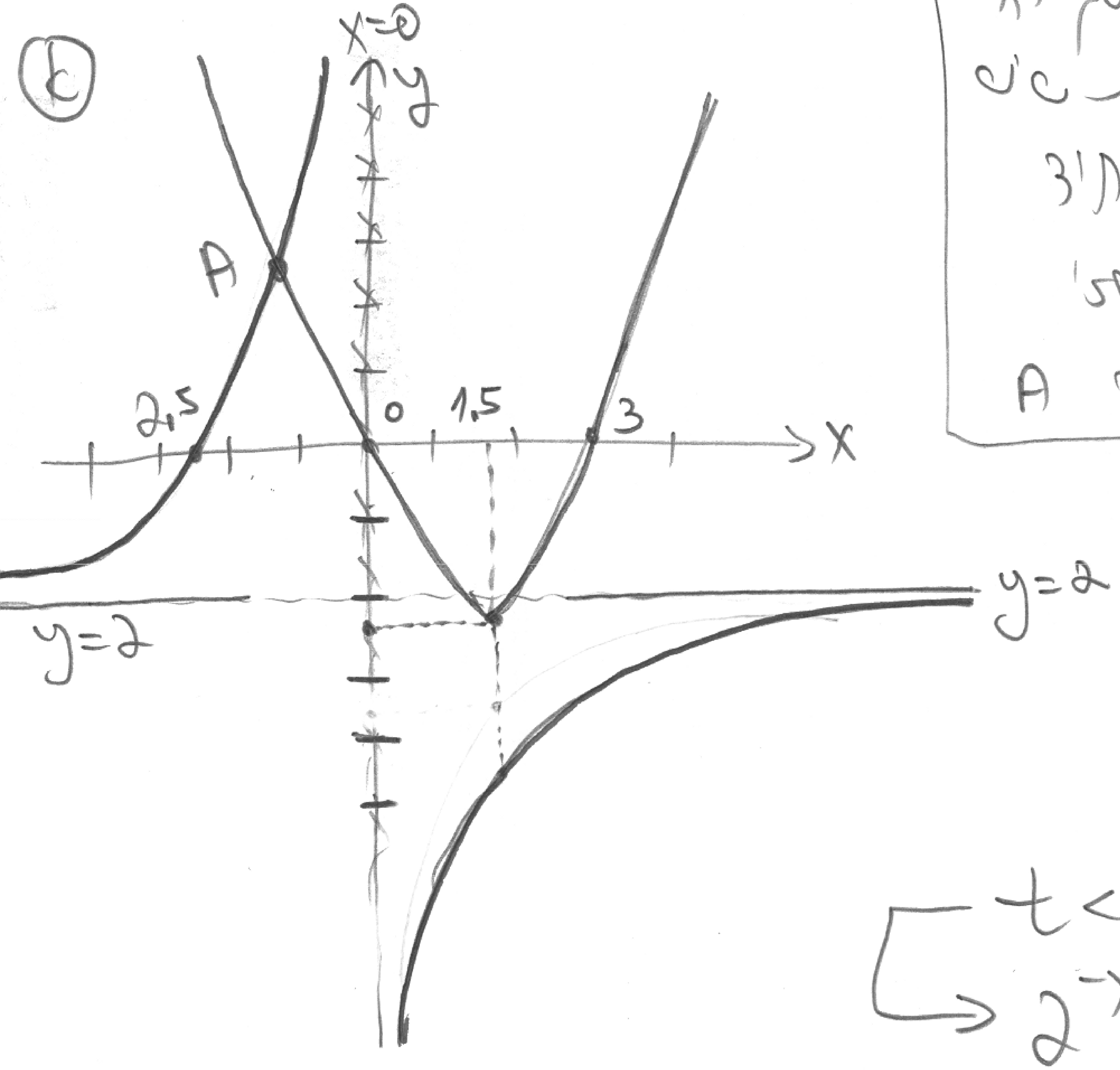
$x^2 - 3x = \frac{-5-2x}{x}$

$x^3 - 3x^2 = -5 - 2x$

$x^3 - 3x^2 + 2x + 5 = 0$

בעזרת הסקיצה
ניתן לראות שיש
פתרון יחיד
ברביע הש'
בנקודה A

ג



ד

$4^x - 3 \cdot 2^x = -5 \cdot 2^{-x} - 2$

$2^x = t$ $t^2 - 3t = \frac{-5}{t} - 2 = \frac{-5-2t}{t}$

הצבנו 4 במקום

הצבנו 4 במקום

ושינינו כאשר x שלילי ⇐

$t < 0$

$2^{-x} =$ מס' שלילי ⇒ אין פתרון (הפונקציה 2^{-x} תמיד חיובית)

שאלה 3:

א

$$\frac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}} = -\sqrt{x}$$

$$\sqrt{(3x+2)^2-24x} = -\sqrt{x}\left(3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\sqrt{\quad} = -3x+2 \quad /()^2$$

$-3x+2 \geq 0$

$\boxed{\frac{2}{3} \geq x}$

$$(3x+2)^2-24x = 4-12x+9x^2$$

$$\cancel{9x^2}+12x+4-24x = 4-12x+\cancel{9x^2}$$

$$0x=0$$

כל x בתחום ההגדרה

$$3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}} \neq 0$$

$$3x-2 \neq 0$$

$\boxed{x \neq \frac{2}{3}}$

$$(3x+2)^2-24x \geq 0$$

$$9x^2-12x+4 \geq 0$$

$$(3x-2)^2 \geq 0$$

$\boxed{x \; \forall}$

$\boxed{x>0}$

$\boxed{0<x<\frac{2}{3}}$

לא נטפל בתחום ההגדרה.
מקבל במשוב את נקודה
נשאל ואז נחסוך הרבה
זמן

שאלה 3:

ד

$$4\log_9^2(-x) + 2\log_9\left(\overset{(-x)^2}{x^2}\right) \le -1$$

$-x > 0$	$x^2 > 0$
$x < 0$	$x \ne 0$

$$\boxed{x < 0}$$

$$4\left(\log_9(-x)\right)^2 + 4\log_9(-x) \le -1$$

$$\log_9(-x) = t$$

$$4t^2 + 4t + 1 \le 0$$

$$(2t+1)^2 \le 0$$

$$2t + 1 = 0$$

$$2t = -1$$

$$t = \frac{-1}{2}$$

$$\log_9(-x) = \frac{1}{2}$$

$$9^{-\frac{1}{2}} = -x$$

$$\frac{1}{3} = -x$$

$$\boxed{-\frac{1}{3} = x}$$

[illegible] בתחום

ת.ה.

(א)

$$2^{|x|} > \frac{7\cdot 2^{|x|}-32}{2^{|x|}-5}$$

$$t > \frac{7t-32}{t-5}$$

$$\frac{7t-32-t^2+5t}{t-5} < 0$$

$$\frac{-t^2+12t-32}{t-5} < 0$$

$$\frac{t^2-12t+32}{5-t} < 0$$

$$\frac{(t-4)(t-8)}{(5-t)} < 0$$

אלהע:

$$2^{|x|} = t$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & & - & & + & & - \\ \hline & 4 & & 5 & & 8 & \end{array}$$

או

$$4 < t < 5 \qquad t > 8$$

$$2^2 < 2^{|x|} < 2^{\log_2 5} \qquad 2^{|x|} > 2^3$$

$$2 < |x| < \log_2 5 \qquad |x| > 3$$

$$\boxed{-3 > x \;,\; \log_2\tfrac{1}{5} < x < -2 \;,\; 2 < x < \log_2 5 \;,\; x > 3}$$

$$2^{|x|} - 5 \neq 0$$

$$2^{|x|} \neq 5$$

$$|x| = \log_2 5$$

$$x \neq \log_2 5$$

$$x \neq -\log_2 5 \Rightarrow x \neq \log_2 \tfrac{1}{5}$$

שאלה ע'

(?)

$$\log_x a \cdot \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{2a-x}}\right)=1$$

$$\frac{\log_{\sqrt{a}} a}{\log_{\sqrt{a}} x}\cdot\left[\log_{\sqrt{a}} a-\log_{\sqrt{a}}(\sqrt{2a-x})\right]=1$$

$$2(2-\log_{\sqrt{a}}\sqrt{\ })=\log_{\sqrt{a}} x$$

$$4-2\log_{\sqrt{a}}(\sqrt{\ })=\log_{\sqrt{a}} x$$

$$4=\log_{\sqrt{a}} x+\log_{\sqrt{a}}(2a-x)$$

$$4=\log_{\sqrt{a}}(x(2a-x))$$

$$\sqrt{a}^4=2ax-x^2$$

$$a^2=2ax-x^2$$

$$a^2-2ax+x^2=0$$

$$(a-x)^2=0$$

$$\boxed{x=a} \qquad \boxed{a>0} \qquad \boxed{a\neq 1}$$

$x>0$

$x\neq 1$

$a>0$

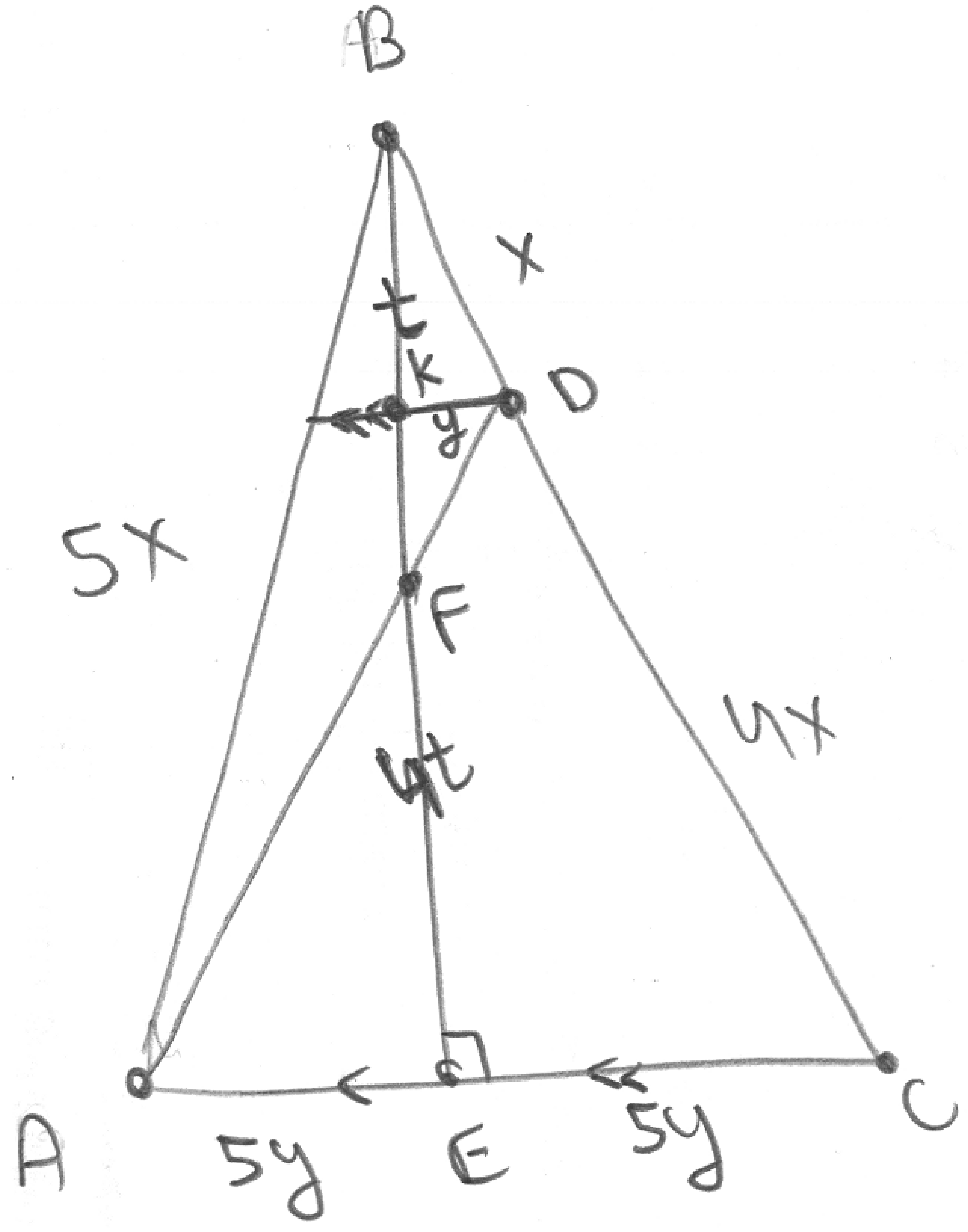
$a\neq 1$

$2a-x>0 \qquad x<2a$

$$\frac{a}{\sqrt{2a-x}}>0$$

$a>0$

שאלה 5



א $\dfrac{BK}{KE} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{1}{4}$ גלס

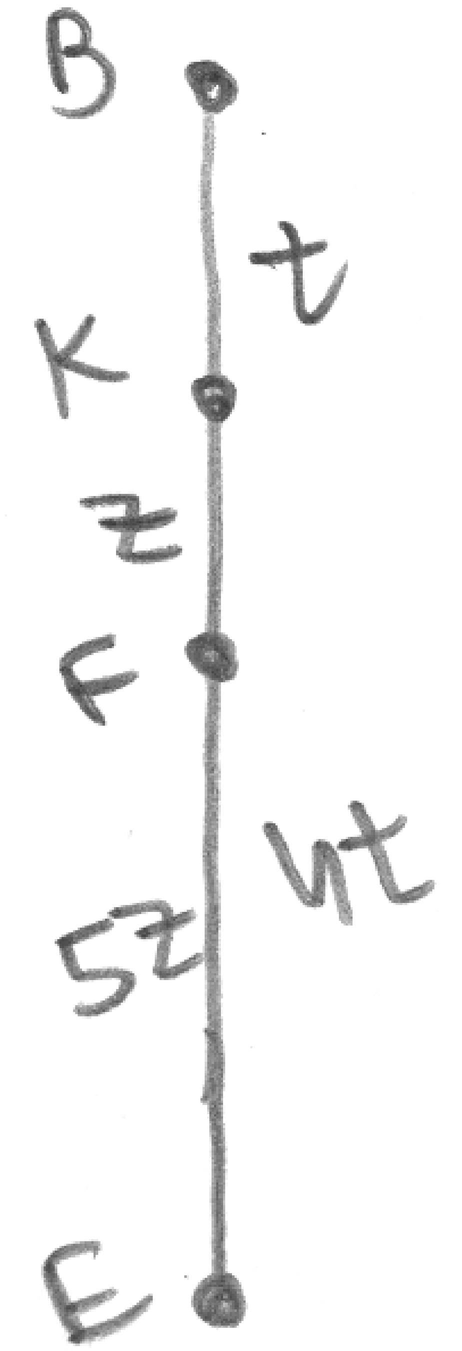
$\Downarrow$

$\boxed{BE = 5BK}$

$\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{KD}{EC} = \dfrac{1}{5}$

ב $\dfrac{KD}{AE} = \dfrac{KF}{EF} = \dfrac{y}{5y} = \dfrac{1}{5}$ $\boxed{EF = 5KF}$

ג



$6z = 4t$

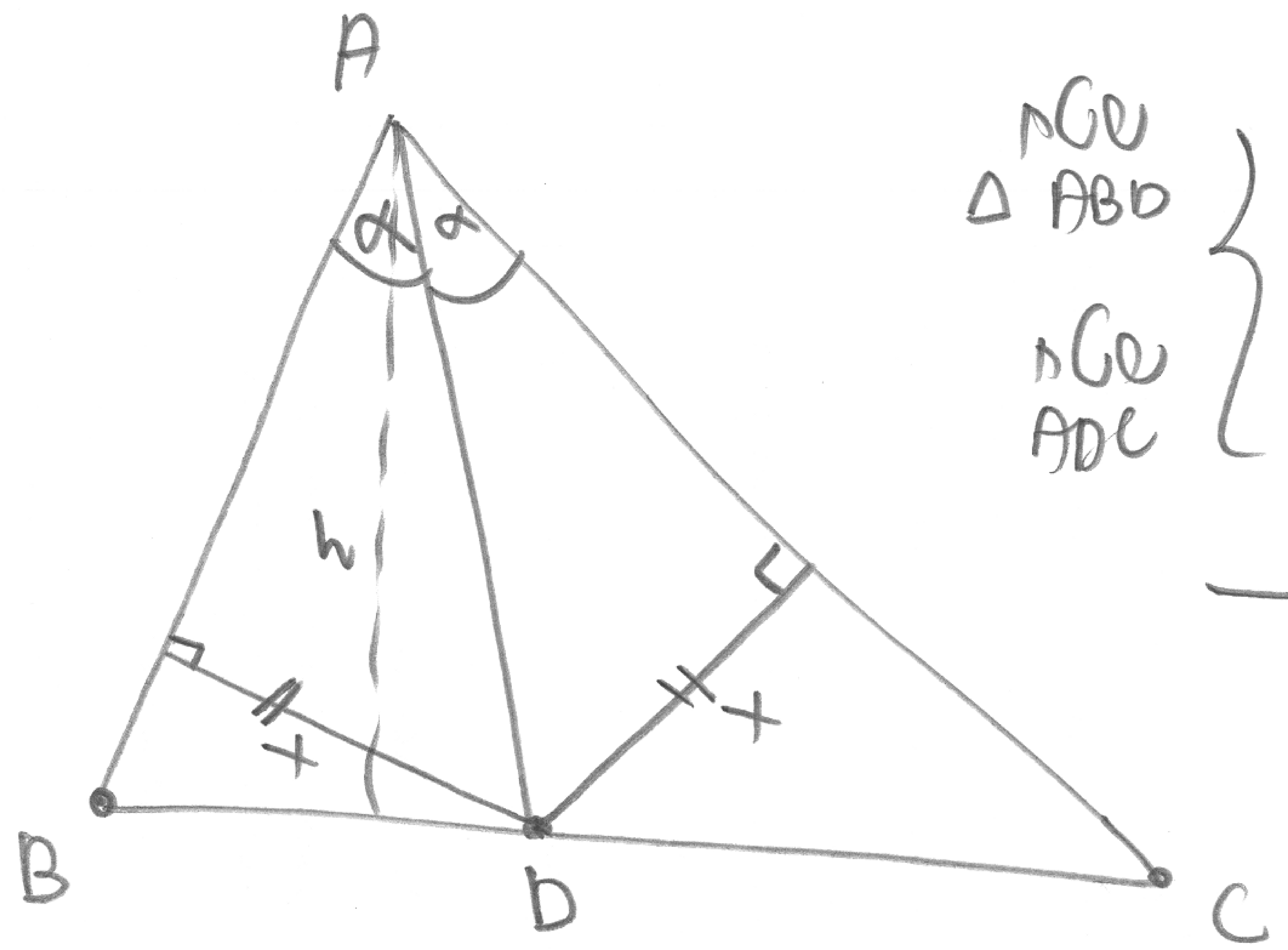
$z = \frac{2}{3}t \Rightarrow BF = t + \frac{2}{3}t = \frac{5}{3}t$

$FE = 5t = \frac{10}{3}t$

$\boxed{1:2}$

שאלה 6:

ג



נקודה על חוצה
הזווית נמצאת במרחק
שווה משוקי הזווית

שטח ΔABD

$$\frac{h\cdot BD}{2}=\frac{x\cdot AB}{2}$$

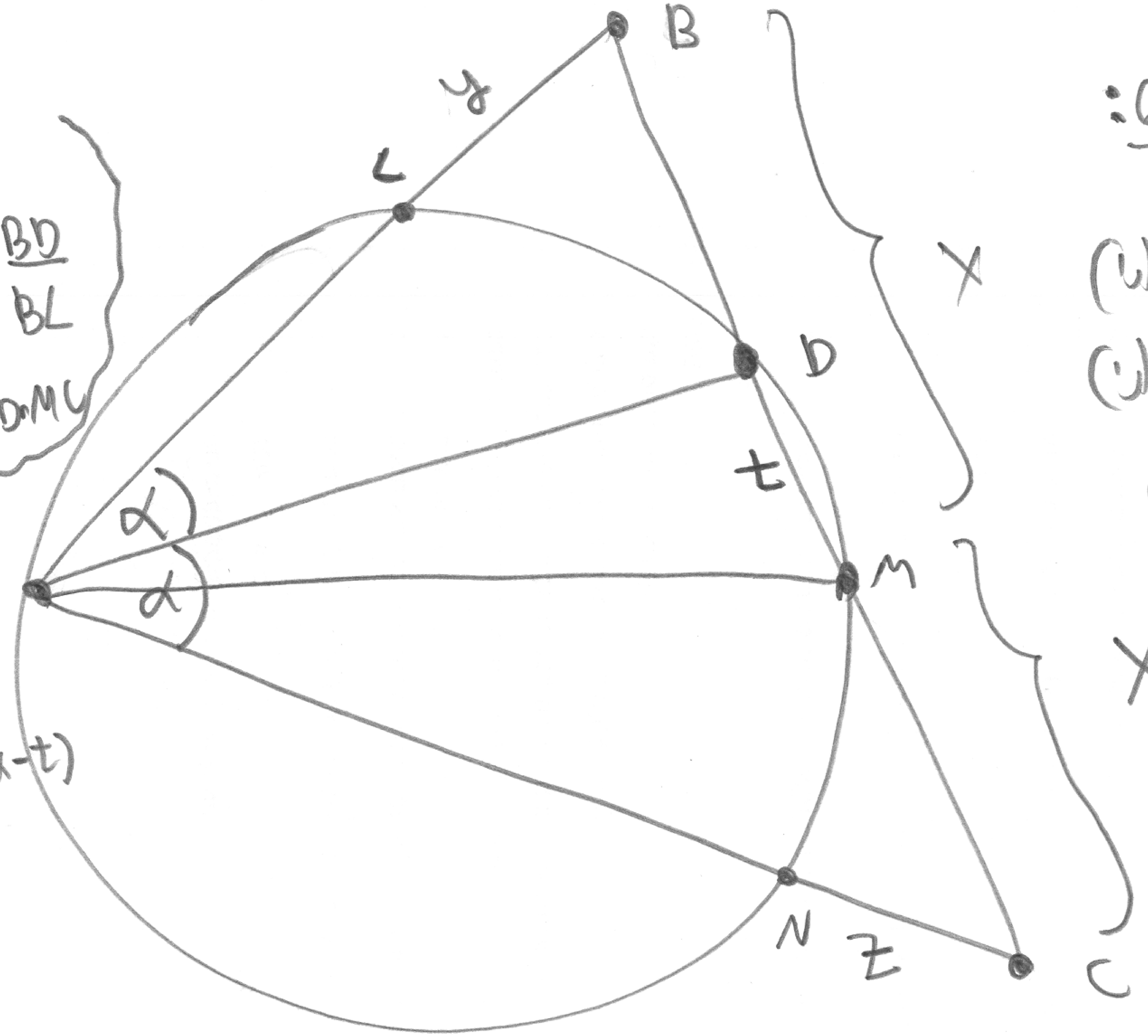
שטח ADC

$$\frac{h\cdot DC}{2}=\frac{x\cdot AC}{2}$$

$\div$

$$\boxed{\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}}$$

מ.ש.ל



שאלה 6:

(חזקת נקודה) $BL \cdot BA = BD \cdot BM$

(חזקת נקודה) $CN \cdot CA = CM \cdot CD$

δ.e.N ÷
$$\boxed{AB \cdot y = (x-t) \cdot x}$$
$$AC \cdot z = (x+t) \cdot x$$

$$\frac{AB \cdot y}{AC \cdot z} = \frac{(x-t)\cancel{x}}{(x+t)\cancel{x}}$$

$$\cancel{\frac{x-t}{x+t}} \cdot \frac{y}{z} = \cancel{\frac{x-t}{x+t}}$$

$$\boxed{y = z}$$

(?) = f3:

$$\frac{AB}{MC} = \frac{BD}{BL}$$

$$AB \cdot BL = BD \cdot MC$$

(?) $AB \cdot y = x \cdot (x-t)$

(2) $y = z$

(חוצה זווית) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{x-t}{x+t}}$